CONCOURS D'ADMISSION

À

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

EN 2013

CONCOURS SCIENCES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

&

D'ANALYSE DE PROCESSUS

Durée : 4 heures – Coefficient 14
Mercredi 23 janvier 2013 de 08h00 à 12h00

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés pour cette épreuve.

L'attention des candidats est attirée sur l'importance d'une bonne rédaction. Les copies satisfaisantes dans ce domaine seront valorisées.

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 3-

Exercice 1.

Un sac contient 100 pièces d'apparence identique. 25 de ces pièces sont équilibrées, les 75 autres sont fausses et la probabilités d'obtenir PILE pour l'une de ces pièces est égale à $\frac{3}{5}$.

On tire au hasard une pièce du sac. On considère les évènements suivants :

A : "la pièce tirée est équilibrée";
B : " la pièce tirée est fausse".

1. Donner les probabilités des évènements A et B.
2. On lance la pièce précédemment tirée. Calculer la probabilité d'obtenir PILE.
3. Sachant que le résultat du lancer est PILE, quelle est la probabilité pour que la pièce tirée soit équilibrée?
4. On décide de déclarer fausse toute pièce tirée dont le résultat du lancer est PILE. Calculer la probabilité de déclarer fausse une pièce équilibrée.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2.

On considère le nombre complexe :

$$z=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=\sqrt{2}$$

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{10}{1+e^{2-\frac{1}{2}x}}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1- Calculer les deux limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- Calculer la dérivée de f.

3- Étudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variations.

4- Tracer la courbe représentative de $f : C_f$.

5- Démontrer que f vérifie une équation différentielle que l'on précisera.

Exercice 4.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$

   Déterminer les réels a, b et c pour que la matrice M^2 soit la matrice nulle.

2. On considère les matrices:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = P + I$

   a. Montrer que P^2 est la matrice nulle.

   b. Exprimer les matrices A^2 et A^3 en fonction des matrices P et I

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = nP + I$.

4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. On pose, pour n un entier supérieur ou égal à 2, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A^k$.

   Exprimer S_n en fonction de P, I et n

Analyse de processus

Une technique de programmation très classique est d'appliquer une procédure donnée à chaque élément d'une liste.

1. Ecrire un algorithme qui à partir d'une liste de nombres retourne une liste de carrés de ces nombres :

   $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 5) \rightarrow (1 \quad 4 \quad 9 \quad 25)$

2. On dispose d'une fonction, notée *cons*, de concaténation de deux listes et d'une fonction, notée premier-liste, qui retourne le premier élément d'une liste sous forme d'une liste :

   Exemple

   Si $l_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5)$ et $l_2 = (1 \quad 3 \quad 7 \quad a)$ alors

   cons $(l_1, l_2) = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \quad a)$

   premier-liste $(l_1) = (1)$

   En utilisant les fonctions *cons* et *premier-liste*, écrire une procédure récursive qu'on note *carré-liste* qui à partir d'une liste de nombres retourne une liste de carrés de ces nombres.